УДК 517.925
DOI 10.21685/2072-3040-2020-3-8

В. Ш. Ройтенберг

О БИФУРКАЦИЯХ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ТРАЕКТОРИИ «ВОСЬМЕРКА» КУСОЧНО-ГЛАДКОГО ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ С СИММЕТРИЕЙ

Аннотация.

Актуальность и цели. Изучение бифуркации в типичных одно- и двухпараметрических семействах кусочно-гладких динамических систем на плоскости представляет значительный интерес как с теоретической, так и с прикладной точки зрения. Этим исследованиям посвящено большое число научных работ. В приложениях часто встречаются динамические системы с симметрией. Однако бифуркации кусочно-гладких систем с симметрией пока изучены мало. Поэтому исследование бифуркаций в типичных семействах таких динамических систем представляется актуальным.

Материалы и методы. Используются методы качественной теории дифференциальных уравнений. Основной метод состоит в исследовании поведения функций последования и соответствующих функций расхождения при разных значениях параметров.

Результаты. Рассматривается двухпараметрическое семейство кусочно-гладких векторных полей на плоскости, «сшитых» из гладких векторных полей, заданных, соответственно, в верхней и нижней полуплоскостях. Векторные поля семейства предполагаются инвариантными при преобразовании симметрии относительно начала координат. При нулевых значениях параметров векторное поле имеет орбитно устойчивую периодическую траекторию Г, гомеоморфную «восьмерке», касающуюся в начале координат О оси x и сверху и снизу. В случае общего положения описываются бифуркации в окрестности U контура Г. Получена бифуркационная диаграмма – разбиение окрестности нуля на плоскости параметров на классы топологической эквивалентности в U векторных полей семейства.

Выводы. Описаны типичные двухпараметрические бифуркации в окрестности рассматриваемой периодической траектории.

Ключевые слова: кусочно-гладкое векторное поле, симметрия, периодическая траектория, бифуркация, бифуркационная диаграмма.

V. Sh. Roytenberg

ON BIFURCATIONS OF A PERIODIC TRAJECTORY “EIGHT” OF A PIESEWISE SMOOTH VECTOR FIELD WITH SYMMETRY

Abstract.

Background. The study of bifurcation in typical one- and two-parameter families of piecewise smooth dynamical systems on the plane is of considerable interest, both from a theoretical and applied point of view. A large number of scientific papers are devoted to these studies. In applications, dynamic systems with symmetry are often found. However, bifurcations of piecewise smooth systems with symmetry have so far been little studied. Therefore, the study of bifurcations in typical families of such dynamical systems seems relevant.

Materials and methods. We use methods of the qualitative theory of differential equations. The main method is to study the behavior of Poincare mappings and the corresponding divergence functions for various parameter values.

Results. We consider a two-parameter family of piecewise-smooth vector fields in the plane that are “stitched” from smooth vector fields defined respectively in the upper and lower half-planes. The vector fields of the family are assumed to be invariant at the transformation of symmetry with respect to the origin. At zero values of the parameters, the vector field has an orbital stable periodic trajectory Γ, homeomorphic to the “eight”, tangent to the *x* axis at the origin and above and below. In the generic case, bifurcations are described in a neighborhood *U* of the contour Γ. A bifurcation diagram is obtained – a partition of a neighborhood of zero on the parameter plane into classes of topological equivalence in *U* of vector fields of the family.

Conclusions. Generic two-parameter bifurcations in a neighborhood of the considered periodic trajectory are described.

Keywords: piecewise smooth vector field, symmetry, periodic trajectory, bifurcation, bifurcation diagram.

Введение

Исследованию бифуркаций двумерных кусочно-гладких динамических систем посвящено много работ, например книги [1–2] и статьи [3–5]. Динамические системы, моделирующие различные процессы, часто имеют естественную симметрию. В статье [5] рассматривались локальные бифуркации обратимых кусочно-гладких систем. Здесь мы исследуем некоторые бифуркации систем, инвариантных при симметрии плоскости относительно начала координат.

Пусть $D=(\mathbf{R}^2_+,\mathbf{R}^2_-)$ – разбиение плоскости $\mathbf{R}^2$ на полуплоскости $\mathbf{R}^2_+ := \{(x,y)\in \mathbf{R}^2 : y\ge 0\}$ и $\mathbf{R}^2_+ := \{(x,y)\in \mathbf{R}^2 : y\le 0\}$, а X^+ и X^- – векторные поля класса C^r ($r\ge 2$) соответственно в $\mathbf{R}^2_+$ и $\mathbf{R}^2_-$. *Кусочно-гладким векторным полем* $X=(X^+,X^-)$ *на* $\mathbf{R}^2$ *с разбиением* D назовем класс всех (вообще говоря, разрывных в точках оси x) векторных полей $\hat{X}$ на $\mathbf{R}^2$ таких, что $\hat{X}(x,y)=X^+(x,y)$ при $y>0$ и $\hat{X}(x,y)=X^-(x,y)$ при $y<0$. Будем рассматривать векторные поля, инвариантные относительно отображения $S:(x,y)\mapsto(-x,-y)$, т.е. такие, что

$$X^-(x,y)=-X^+(-x,-y) \text{ для всех } (x,y)\in \mathbf{R}^2_- . \tag{1}$$

Множество всех таких векторных полей обозначим X^r_S.

Траектории поля $X\in \mathrm{X}^r_S$ определим согласно Филиппову [1] как траектории дифференциального включения $(\dot{x},\dot{y})\in \chi(x,y)$, где $\chi(x,y)=\{\hat{X}(x,y)\}$, если $y\ne 0$, и $\chi(x,y)$ – выпуклая оболочка векторов $X^+(x,y)$ и $X^-(x,y)$, если $y=0$. Точки $(x,0)$, в которых векторы $X^+(x,0)$ и

$X^-(x,0)$ не касаются оси x и направлены оба либо внутрь $\mathbf{R}^2_+$, либо внутрь $\mathbf{R}^2_-$ будем называть *простыми точками* поля.

1. Постановка задачи и результаты

Рассмотрим семейство векторных полей $X_\varepsilon = (X^+_\varepsilon, X^-_\varepsilon) \in \mathrm{X}^r_S$, зависящих от параметра ε, принадлежащего некоторой окрестности нуля E в двумерном евклидовом пространстве. Пусть в координатах $X^\pm_\varepsilon(x,y) = \left(P^\pm(x,y,\varepsilon), Q^\pm(x,y,\varepsilon)\right)$, где функции $P^\pm$ и $Q^\pm$ принадлежат классу C^r. Будем предполагать, что поле $X_0 = (X^+_0, X^-_0)$ в точке $O = (0,0)$ удовлетворяет следующим условиям.

Условие 1. $P^+(0,0,0) > 0,\ Q^+(0,0,0) = 0, \partial Q^+(0,0,0)/\partial x > 0$.

Из условия 1 следует, что в точке O начинается положительная (отрицательная) полутраектория L^+_+ (L^+_-) векторного поля X^+_0, касающаяся в O оси x. Ввиду (1) $L^-_+ = S(L^+_+)$ ($L^-_- = S(L^+_-)$) – положительная (отрицательная) полутраектория векторного поля X^-_0, касающаяся в O оси x.

Предположим, что выполняется и условие 2.

Условие 2. Через точку O проходит периодическая траектория Γ^+ векторного поля X_0, содержащая дуги L^+_+ и L^-_- и пересекающаяся с $\mathbf{R}^2_0 \setminus \{O\}$ только в простых точках поля.

Из условия 2 следует, что Γ^+ – простая замкнутая кривая. Вследствие симметрии через точку O проходит и периодическая траектория $\Gamma^- = S(\Gamma^+)$ векторного поля X_0, содержащая дуги L^-_+ и L^+_-, пересекающаяся с $\mathbf{R}^2_0 \setminus \{O\}$ только в простых точках поля (рис. 1). Тогда $\Gamma = \Gamma^+ \cup \Gamma^-$ – также периодическая траектория.

Лемма 1. Существуют такие числа $0 < u_0 < \bar{u}_0$ и такое C^1-отображение $\chi^+_0 : [0,u_0) \to [0,\bar{u}_0)$, что $\chi^+_0(0) = 0$, $\forall u \in [0,u_0)$ $(\chi^+_0)'(u) > 0$, а положительная полутраектория поля X_0, начинающаяся в точке $(u,0)$, $u \in [0,u_0)$, следующий раз пересекает дугу $[0,\bar{u}_0) \times \{0\}$ в точке $(\chi^+_0(u),0)$.

Доказательство леммы приведено в разд. 2.

Обозначим $\lambda_{\text{int}} := (\chi^+_0)'(0)$. При $\lambda_{\text{int}} < 1$ траектории поля X_0, начинающиеся в точках достаточно малой отрицательной полуокрестности Γ^+ и Γ^-, ω-предельны соответственно к Γ^+ и Γ^- (рис. 1).

Пусть $\eta : (-1,1) \to \operatorname{int} \mathbf{R}^2_+$ – такое C^∞-отображение, что $\forall u \in (-1,1)$ $\eta'(u) \neq 0$, дуги $\eta(-1,1)$ и L^+_+ пересекаются в единственной точке $\eta(0)$, причем репер $\left(\eta'(0), X^+_0(\eta(0))\right)$ положительно ориентирован.

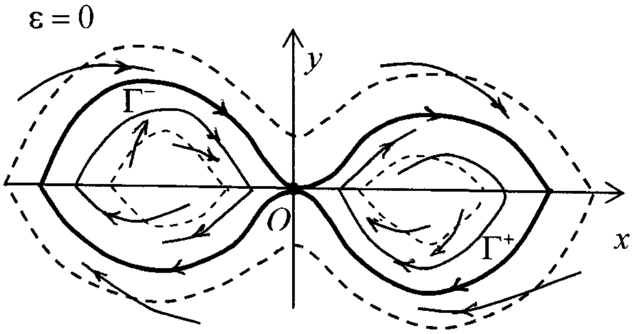

Рис. 1. Траектории поля X_0, $\lambda_{\text{int}} < 1$, $\lambda_{\text{ext}} < 1$

Так как $\Gamma \setminus \{O\}$ пересекается с осью x только в простых точках поля, а дуга $L_+^+ \cup L_-^+$ ($L_+^- \cup L_-^-$) траектории Γ имеет положительную полуокрестность, принадлежащую целиком $\mathbf{R}_+^2$ ($\mathbf{R}_-^2$), то существует такое C^r-отображение $\chi_0^- : [-u_1, 0] \to (-1, 0]$, что $\chi_0^-(0) = 0$, $\forall u \in [-u_1, 0]$ $(\chi_0^-)'(u) > 0$, а положительная полутраектория поля X_0, начинающаяся в точке $\eta(u)$, $u \in [-u_1, 0]$, следующий раз пересекает дугу $\eta(-1, 0]$ в точке $\eta(\chi_0^-(u))$. Обозначим $\lambda_{\text{ext}} := (\chi_0)'(0)$. При $\lambda_{\text{ext}} < 1$ траектории поля X_0, начинающиеся в точках достаточно малой положительной полуокрестности Γ, ω-предельны к Γ (рис. 1).

Из условия 1 следует, что существуют число $a > 0$, окрестность нуля E' в E, и C^r-функция $\hat{x} : \mathrm{E}' \to (-a, a)$, $\hat{x}(0) = 0$ такие, что $\forall (x, y, \varepsilon) \in [-a, a] \times [0, a] \times \mathrm{E}'$:

$$P^+(x, y, \varepsilon) > 0, \ \frac{\partial}{\partial x} Q^+(x, y, \varepsilon) > 0, \ \operatorname{sgn} Q^+(x, 0, \varepsilon) = \operatorname{sgn}(x - \hat{x}(\varepsilon)). \tag{2}$$

Из условий 1 и 2 следует, что найдется такая окрестность нуля $\mathrm{E}'' \subset \mathrm{E}'$ в пространстве параметров, что положительная (отрицательная) полутраектория поля X_ε^+, $\varepsilon \in \mathrm{E}''$, начинающаяся в точке $O_\varepsilon^+ = (\hat{x}(\varepsilon), 0)$ ($O_\varepsilon^- = (-\hat{x}(\varepsilon), 0)$), пересекает дугу $\eta(-1, 1)$ в точке $\eta(u_+(\varepsilon))$ ($\eta(u_-(\varepsilon))$), где $u_\pm(\cdot) \in C^r$, $u_\pm(0) = 0$. Обозначим $\hat{u}(\varepsilon) := u_+(\varepsilon) - u_-(\varepsilon)$. Будем считать, что выполняется следующее условие.

Условие 3. Векторы $\partial \hat{x}(0) / \partial \varepsilon$ и $\partial \hat{u}(0) / \partial \varepsilon$ линейно независимы.

Тогда в некоторой окрестности нуля $\mathrm{E}''' \subset \mathrm{E}''$ в пространстве параметров можно ввести такие C^r-координаты $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, что $\hat{x}(\varepsilon) = \varepsilon_1$, $\hat{u}(\varepsilon) = \varepsilon_2$. Далее мы будем отождествлять точку $\varepsilon \in \mathrm{E}'''$ с ее координатной строкой $\varepsilon \equiv (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ и считать, что $\mathrm{E}''' = (-\delta_1, \delta_1)^2 = (-\delta_1, \delta_1) \times (-\delta_1, \delta_1)$, где $0 < \delta_1 < a$.

Теорема. Пусть выполняются условия 1–3 и $\lambda_{\text{int}} < 1$, $\lambda_{\text{ext}} < 1$. Тогда существуют окрестность U периодической траектории Γ и число $\delta \in (0, \delta_1)$ со следующими свойствами:

1) положительные полутраектории векторных полей X_ε, $\varepsilon \in (-\delta,\delta)^2$, начинающиеся в точках ∂U, входят в U;

2) бифуркационная диаграмма семейства X_ε, $\varepsilon \in (-\delta,\delta)^2$, в U представляет собой разбиение области параметров $(-\delta,\delta)^2$ на множества $\mathrm{B}_0 = \{(0,0)\}$, B_i, E_i, $i = 1,2,\ldots,9$ (рис. 2), где

$$\mathrm{E}_1 = \{\varepsilon : \varepsilon_1 \in (0,\delta),\ 0 < \varepsilon_2 < \beta_1(\varepsilon_1)\},\ \mathrm{B}_1 = \{\varepsilon : \varepsilon_1 \in (0,\delta),\ \varepsilon_2 = \beta_1(\varepsilon_1)\},$$

$$\mathrm{E}_2 = \{\varepsilon : \varepsilon_1 \in (0,\delta),\ \beta_1(\varepsilon_1) < \varepsilon_2 < \beta_2(\varepsilon_1)\},\ \mathrm{B}_2 = \{\varepsilon : \varepsilon_1 \in (0,\delta),\ \varepsilon_2 = \beta_2(\varepsilon_1)\},$$

$$\mathrm{E}_3 = \{\varepsilon : \varepsilon_1 \in (0,\delta),\ \beta_2(\varepsilon_1) < \varepsilon_2 < \delta\},$$

$$\beta_k : (0,\delta) \to (0,\delta),\ \beta_k \in C^1,\ \beta_k(+0) = \beta_k'(+0) = 0,\ k = 1,2,\ \beta_1(\varepsilon_1) < \beta_2(\varepsilon_1),$$

$$\mathrm{B}_3 = \{0\} \times (0,\delta),\ \mathrm{E}_4 = (-\delta,0) \times (0,\delta),\ \mathrm{B}_4 = (-\delta,0) \times \{0\},$$

$$\mathrm{E}_5 = \{\varepsilon : \varepsilon_1 \in (-\delta,0),\ \beta_5(\varepsilon_1) < \varepsilon_2 < 0\}\ \ \mathrm{B}_5 = \{\varepsilon : \varepsilon_1 \in (-\delta,0),\ \varepsilon_2 = \beta_5(\varepsilon_1)\},$$

$$\mathrm{E}_6 = \{\varepsilon : \varepsilon_1 \in (-\delta,0),\ \beta_6(\varepsilon_1) < \varepsilon_2 < \beta_5(\varepsilon_1)\},$$

$$\mathrm{B}_6 = \{\varepsilon : \varepsilon_1 \in (-\delta,0),\ \varepsilon_2 = \beta_6(\varepsilon_1)\},$$

$$\mathrm{E}_7 = \{\varepsilon : \varepsilon_1 \in (-\delta,0),\ \beta_7(\varepsilon_1) < \varepsilon_2 < \beta_6(\varepsilon_1)\},\ \mathrm{B}_7 = \{\varepsilon : \varepsilon_1 \in (-\delta,0),\ \varepsilon_2 = \beta_7(\varepsilon_1)\},$$

$$\beta_j : (-\delta,0) \to (-\delta,0),\ \beta_j \in C^1,\ \beta_j(-0) = \beta_j'(-0) = 0,\ j = 5,6,7,$$

$$\beta_7(\varepsilon_1) < \beta_6(\varepsilon_1) < \beta_5(\varepsilon_1),\ \mathrm{E}_8 = \{\varepsilon : \varepsilon_1 \in (-\delta,0),\ -\delta < \varepsilon_2 < \beta_7(\varepsilon_1)\},$$

$$\mathrm{B}_8 = \{0\} \times (-\delta,0),\ \mathrm{E}_9 = (0,\delta) \times (-\delta,0),\ \mathrm{B}_9 = (0,\delta) \times \{0\}.$$

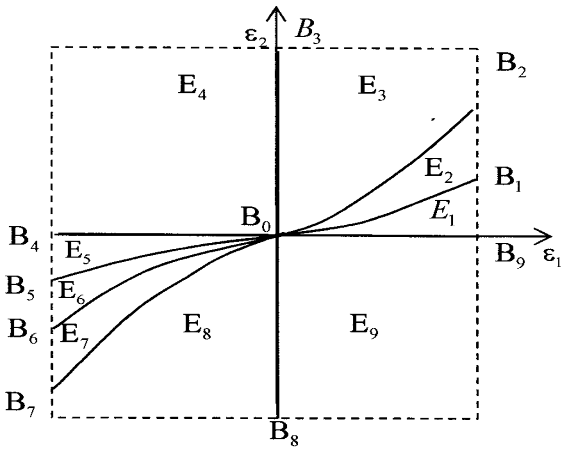

Рис. 2. Бифуркационная диаграмма

Схемы фазовых портретов векторных полей X_ε в U имеют вид, изображенный на рис. 3. Векторные поля X_ε при $\varepsilon \in \mathrm{E}_i$ – грубые в U.

Доказательство теоремы приведено в разд. 2–6.

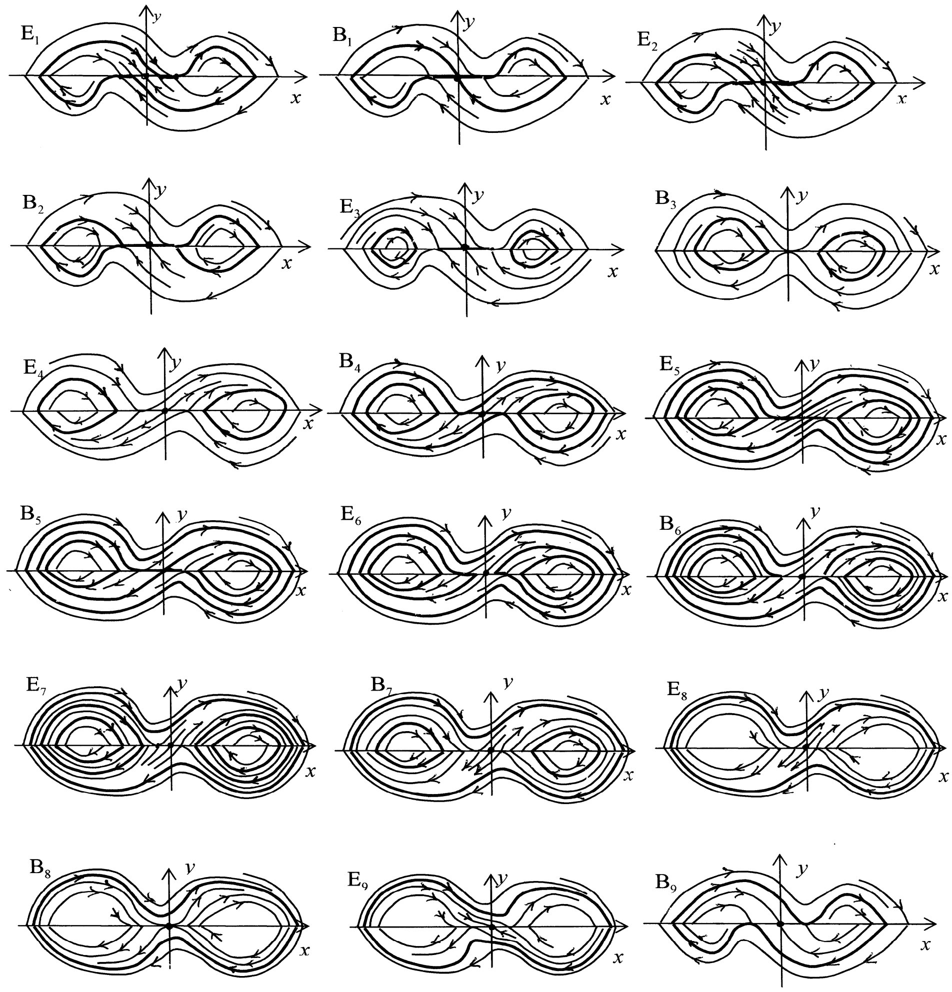

Рис. 3. Перестройки фазовых портретов

2. Функции соответствия, функции последования и функции расхождения

Лемма 2. Существуют числа $\overline{u} \in (0,a)$ и δ_2, $0 < \delta_2 < \min\{\overline{u}, \delta_1\}$, такие, что положительная (отрицательная) полутраектория поля X_ε, $\varepsilon \in (-\delta_2, \delta_2)^2$, начинающаяся в точке $(u,0)$, $u \in [\varepsilon_1, \overline{u}]$ ($u \in [-\varepsilon_1, \overline{u}]$) как полутраектория поля X_ε^+ (X_ε^-), первый раз пересекает дугу $\eta(-1,1)$ в точке $\eta(f_\varepsilon^+(u))$ ($\eta(f_\varepsilon^-(u))$), где для функций соответствия $f_\varepsilon^\pm$ имеем

$$f_\varepsilon^\pm(u) = u_\pm(\varepsilon) + r_\pm(u,\varepsilon), \tag{3}$$

$$r_\pm(\cdot,\cdot) \in C^r,\ r_\pm(\pm\varepsilon_1, \varepsilon) = (r_\pm)'_u(\pm\varepsilon_1, \varepsilon) = 0,$$

$$(r_\pm)'_u(u,\varepsilon) > 0 \text{ при } \varepsilon \in (-\delta_2, \delta_2)^2, u \in (\pm\varepsilon_1, \overline{u}], \tag{4}$$

$$(r_\pm)''_{uu}(u,\varepsilon) > 0 \text{ при } \varepsilon \in (-\delta_2, \delta_2)^2,\ u \in [\pm\varepsilon_1, \overline{u}]. \tag{5}$$

Доказательство. Пусть $\Pi_a := [-a,a]\times[0,a]$. Из условия (2) следует, что в $\Pi_a \times (-\delta_1,\delta_1)^2$ определена функция $R = Q^+ / P^+$, а траектории поля X_ε^+ в Π_a совпадают с интегральными кривыми уравнения $y' = R(x,y,\varepsilon)$. Считая числа a и δ_1 выбранными достаточно малыми, получим, что для любого $u\in[\varepsilon_1,a)$ это уравнение имеет решение $y = Y(x,u,\varepsilon)$, $x\in[u,a]$, удовлетворяющее начальному условию $Y(u,u,\varepsilon)=0$, при этом $Y\in C^r$, $0<Y(x,u,\varepsilon)<a$ для $x\in(u,a]$. Обозначим $\varphi_1(u,\varepsilon) := Y(a,\varepsilon_1,\varepsilon) - Y(a,u,\varepsilon)$. Мы можем считать, что $\Pi_a \cap \eta(-1,1) = \varnothing$. Если числа $\bar v > 0$, $\delta_2 \in (0,\delta_1)$, достаточно малы, то траектория поля X_ε, $\varepsilon\in(-\delta_2,\delta_2)^2$, начинающаяся в точке $(Y(a,\varepsilon_1,\varepsilon)-v,0)$, $v\in[0,\bar v)$, первый раз пересекает дугу $\eta(-1,1)$ в точке $\eta(\varphi_2(v,\varepsilon))$, где $\varphi_2(\cdot,\cdot)\in C^r$,

$$(\varphi_2)'_v(v,\varepsilon)) > 0\,,\ \varphi_2(0,\varepsilon) = u_+(\varepsilon)\,. \qquad (6)$$

Согласно [6, с. 120] имеем:

$$Y'_u(a,u,\varepsilon) = -R(u,0,\varepsilon)F(u,\varepsilon)\,, \text{ где } F(u,\varepsilon) = \exp\int_u^a R'_y(x,Y(x,u,\varepsilon))ds\,. \qquad (7)$$

Вследствие (2), где, напомним $\hat x(\varepsilon) = \varepsilon_1$, имеем $R(\varepsilon_1,0,\varepsilon) = Q^+(\varepsilon_1,0,\varepsilon) = 0$, $R'_x(\varepsilon_1,0,\varepsilon) = (Q^+)'_x(\varepsilon_1,0,\varepsilon)/(P^+(\varepsilon_1,0,\varepsilon))^2 > 0$. Отсюда и из (7) получаем $Y'_u(a,\varepsilon_1,\varepsilon)=0$, $Y''_{uu}(a,\varepsilon_1,\varepsilon) = -\left[R(u,0,\varepsilon)F'_u(u,\varepsilon) + R'_x(u,0,\varepsilon)F(u,\varepsilon)\right]_{u=\varepsilon_1} = -R'_x(\varepsilon_1,0,\varepsilon)F(\varepsilon_1,\varepsilon) < 0$. Поэтому

$$\varphi_1(\varepsilon_1,\varepsilon)=0\,,\ (\varphi_1)'_u(\varepsilon_1,\varepsilon)=0\,,\ (\varphi_1)''_{uu}(\varepsilon_1,\varepsilon)>0\,. \qquad (8)$$

При достаточно малых $\bar u > 0$ и $\delta_2\in(0,\bar u)$ траектория поля X_ε, $\varepsilon\in(-\delta_2,\delta_2)^2$, начинающаяся в точке $(u,0)$, $u\in[\varepsilon_1,\bar u]$, первый раз пересекает дугу $\eta(-1,1)$ в точке $\eta(f_\varepsilon^+(u))$, где $f_\varepsilon^+(u) := \varphi_2(\varphi_1(u,\varepsilon),\varepsilon)$. Из (6) и (8) следует, что f_ε^+ удовлетворяет условиям (3)–(5). Функция f_ε^- получается аналогично f_ε^+. Лемма 2 доказана.

Определим функции последования $\chi_\varepsilon^+ := (f_\varepsilon^-)^{-1}\circ f_\varepsilon^+$.

Доказательство леммы 1. Для функции последования χ_0^+ имеем $\chi_0^+(0)=0$. В точках $u\neq 0$ она дифференцируема и $(\chi_0^+)'(u) := \dfrac{(f_0^+)'(u)}{(f_0^-)'(u)} = \dfrac{(r_+)'_u(u,0)}{(r_-)'_u(u,0)} > 0$. Так как $(r_\pm)'_u(0,0)=0$, то по правилу Лопиталя $\lim\limits_{u\to+0}(\chi_0^+)'(u) = \lim\limits_{u\to+0}\dfrac{(r_+)'_u(u,0)}{(r_-)'_u(u,0)} = \dfrac{(r_+)''_{uu}(0,0)}{(r_-)''_{uu}(0,0)}$. Поэтому χ_0^+ – C^1-функция на $[0,\chi_0^-(\bar u)]$, причем

$$\lambda_{\text{int}} = (\chi_0^+)'(0) = (r_+)''_{uu}(0,0) / (r_-)''_{uu}(0,0) > 0 . \qquad (9)$$

Лемма 3. Существуют такие числа $\underline{u} \in (0,1)$ и $\delta_3 \in (0,\delta_2)$, что при $\varepsilon \in (-\delta_3,\delta_3)^2$ $\tilde{u}(\varepsilon) := f_\varepsilon^-(-\varepsilon_1) > -\underline{u}$, а положительная полутраектория поля X_ε, начинающаяся в точке $\eta(u)$ (соответственно, $S\eta(u)$), $u \in [-\underline{u},\tilde{u}(\varepsilon)]$, первый раз пересекает дугу $S\eta(-1,1)$ (соответственно $\eta(-1,1)$) в точке $S\eta(g_\varepsilon(u))$ (соответственно $\eta(g_\varepsilon(u))$), где $g_\varepsilon(u)$ – C^r-функция от (u,ε), $g_\varepsilon(\tilde{u}(\varepsilon)) = u_+(\varepsilon)$,

$$0 < (g_\varepsilon)'(u) < 1 \text{ при всех } \varepsilon \in (-\delta_3,\delta_3)^2 ,\ u \in [-\underline{u},\tilde{u}(\varepsilon)] . \qquad (10)$$

Доказательство. Так как $\tilde{u}(0) = 0$, а периодическая траектория Γ, выходя из точки $\eta(0)$, первый раз пересекает дугу $S\eta(-1,1)$ в точке $S\eta(0)$, то найдется такое число $u_* > 0$, что положительная полутраектория поля X_0, начинающаяся в точке $\eta(u)$ ($S\eta(u)$), $u \in [-u_*,0]$, первый раз пересекает дугу $S\eta(-1,1)$ ($\eta(-1,1)$) в точке $S\eta(g_{00}(u))$ ($\eta(g_{00}(u))$), где $g_{00}(u)$ – C^r-функция, $g_{00}(0) = 0$, $g_{00}'(u) > 0$. Тогда найдется такое число $\underline{u} \in (0,u_*]$, что $g_{00}(g_{00}(u)) = \chi_0^-(u)$ при $u \in [-\underline{u},0]$. Так как $[(g_{00})'(0)]^2 = (\chi_0^-)'(0) = \lambda_{\text{ext}} < 1$, то $0 < g_{00}'(0) < 1$. Пусть $g_{00}'(0) < q < 1$. Мы можем считать, что $g_{00}'(u) \le q$ при всех $u \in [-\underline{u},0]$. Если число $\delta_3 \in (0,\delta_2)$ достаточно мало, то для $\varepsilon \in (-\delta_3,\delta_3)^2$ $u_-(\varepsilon) = f_\varepsilon^-(-\varepsilon_1) > -\underline{u}$. Ввиду компактности отрезка $[-\underline{u},0]$ число δ_3 можно выбрать так, что определено отображение $\eta(u) \mapsto S\eta(g_\varepsilon(u))$, $u \in [-\underline{u}, \tilde{u}(\varepsilon)]$, по траекториям X_ε, $\varepsilon \in (-\delta_3,\delta_3)^2$, такое, что $g_0 = g_{00}$ и выполняется (10).

На отрезке $[-\underline{u}, u_*(\varepsilon)]$, где $u_*(\varepsilon) = g_\varepsilon^{-1} \circ g_\varepsilon^{-1}(u_+(\varepsilon))$, определена функция последования $\chi_\varepsilon^- := g_\varepsilon \circ g_\varepsilon$.

Определим теперь функции расхождения:

$$d(u,v,\varepsilon) := f_\varepsilon^+(u) - f_\varepsilon^-(v) ,\ \varepsilon \in (-\delta_2,\delta_2)^2 ,\ u \in [\varepsilon_1,\overline{u}] ,\ v \in [-\varepsilon_1,\overline{u}] ,$$

$$d_+(u,\varepsilon) := d(u,u,\varepsilon) ,\ \varepsilon \in (-\delta_2,\delta_2)^2 ,\ u \in [|\varepsilon_1|,\overline{u}] ,$$

$$d_-(u,\varepsilon) := \chi_\varepsilon^-(u) - u ,\ \varepsilon \in (-\delta_3,\delta_3)^2 ,\ [-\underline{u}, u_*(\varepsilon)] .$$

Их роль следующая. Если $d(u,v,\varepsilon) = 0$, то из точки $(u,0)$ выходит положительная полутраектория поля X_ε, идущая в точку $(v,0)$. Если $d_+(u,\varepsilon) = 0$ (соответственно $d_-(u,\varepsilon) = 0$), то через точку $(u,0)$ (соответственно $\eta(u)$) проходит периодическая траектория поля X_ε.

Вследствие (3) и равенства $u_+(\varepsilon) - u_-(\varepsilon) =: \hat{u}(\varepsilon) = \varepsilon_2$ имеем

$$d(u,v,\varepsilon) = \varepsilon_2 + r_+(u,\varepsilon) - r_-(v,\varepsilon) . \qquad (11)$$

Лемма 4. Числа $\bar{u}$ и δ_2, $\underline{u}$ и δ_3, определенные в леммах 2 и 3, можно считать выбранными так, что для всех $\varepsilon \in (-\delta_4, \delta_4)^2$, где $0 < \delta_4 \le \min\{\delta_2, \delta_3\}$:

$$d'_{\varepsilon_2}(u, v, \varepsilon) > 0 \text{ при } u \in [\varepsilon_1, \bar{u}],\ v \in [-\varepsilon_1, \bar{u}], \tag{12}$$

$$d_+(\bar{u}, \varepsilon) < 0,\ (d_+)''_{uu}(u, \varepsilon) < 0 \text{ при } u \in [|\varepsilon_1|, \bar{u}], \tag{13}$$

$$d_-(-\underline{u}, \varepsilon) > 0,\ (d_-)'_u(u, \varepsilon) < 0 \text{ при } u \in [-\underline{u}, u_*(\varepsilon)]. \tag{14}$$

Доказательство. Согласно (4) $r_\pm(\pm\varepsilon_1, \varepsilon) = 0$. Следовательно, $(r_\pm)'_{\varepsilon_2}(0,0) = 0$, потому $\bar{u}$ и δ_2 можно считать выбранными так, что

$$|(r_\pm)'_{\varepsilon_2}(u, \varepsilon)| < 1/3 \text{ для } \varepsilon \in (-\delta_2, \delta_2)^2,\ u \in [\pm\varepsilon_1, \bar{u}]. \tag{15}$$

Из (11) $d'_{\varepsilon_2}(u, v, \varepsilon) = 1 + (r_+)'_{\varepsilon_2}(u, \varepsilon) - (r_-)'_{\varepsilon_2}(v, \varepsilon)$. Отсюда и из (15) получаем (12).

Вследствие (11) $(d_+)''_{uu}(0,0) = (r_+)''_{uu}(0,0) - (r_-)''_{uu}(0,0)$. Из (9) и условия $\lambda_{\text{int}} < 1$ получаем $(d_+)''_{uu}(0,0) < 0$, а потому и второе неравенство в (13) при достаточно малых $\bar{u}$ и δ_2. Ввиду (11) и (4) $d_+(0,0) = (d_+)'_u(0,0) = 0$. Отсюда и из второго неравенства в (13) следует, что $d_+(\bar{u}, 0) < 0$. Потому $\bar{u}$ и δ_2 можно считать выбранными так, что при $\varepsilon \in (-\delta_4, \delta_4)^2$ выполняется первое неравенство в (13).

Неравенства (14) следуют из определения d_- и (10).

3. Бифуркационные кривые

Лемма 5. Существуют число $\delta \in (0, \delta_4)$ и C^r-функции $\beta_i : (-\delta, \delta) \to [0, \delta)$, $i = 1, 2$, $\beta_j : (-\delta, \delta) \to (-\delta, 0]$, $j = 5, 6$, такие, что $\beta_k(0) = \beta'_k(0) = 0$ для $k = 1, 2, 5, 6$:

$$\forall \varepsilon_1 \in (0, \delta)\ \ 0 < \beta_1(\varepsilon_1) < \beta_2(\varepsilon_1),\ \forall \varepsilon_1 \in (-\delta, 0)\ \ \beta_6(\varepsilon_1) < \beta_5(\varepsilon_1) < 0,$$

$$\forall \varepsilon \in (0, \delta) \times (-\delta, \delta)\ \ \operatorname{sgn} d(\varepsilon_1, 0, \varepsilon) = \operatorname{sgn}(\varepsilon_2 - \beta_1(\varepsilon_1)), \tag{16}$$

$$\forall \varepsilon \in (0, \delta) \times (-\delta, \delta)\ \ \operatorname{sgn} d(\varepsilon_1, \varepsilon_1, \varepsilon) = \operatorname{sgn}(\varepsilon_2 - \beta_2(\varepsilon_1)), \tag{17}$$

$$\forall \varepsilon \in (-\delta, 0) \times (-\delta, \delta)\ \ \operatorname{sgn} d(0, -\varepsilon_1, \varepsilon) = \operatorname{sgn}(\varepsilon_2 - \beta_5(\varepsilon_1)), \tag{18}$$

$$\forall \varepsilon \in (-\delta, 0) \times (-\delta, \delta)\ \ \operatorname{sgn} d(-\varepsilon_1, -\varepsilon_1, \varepsilon) = \operatorname{sgn}(\varepsilon_2 - \beta_6(\varepsilon_1)). \tag{19}$$

Доказательство. Согласно теореме Уитни [7, с. 587–597] функцию d можно продолжить до C^r-функции $\bar{d}$, определенной на $[-\bar{u}, \bar{u}] \times [-\bar{u}, \bar{u}] \times (-\delta_2, \delta_2)^2$. Из (11) и (4) получаем при $\varepsilon_1 \ge 0$ $\bar{d}(\varepsilon_1, 0, \varepsilon) = \varepsilon_2 - r_-(0, \varepsilon) = \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \int_0^1 (r_-)'_u(-t\varepsilon_1, \varepsilon) dt$. Отсюда, из (4) и (5) имеем $\bar{d}(0,0,0) = 0$, $\frac{\partial}{\partial \varepsilon_2}\big|_{\varepsilon=0} \bar{d}(\varepsilon_1, 0, \varepsilon) = 1$, $\frac{\partial}{\partial \varepsilon_1} \bar{d}(\varepsilon_1, 0, \varepsilon)\big|_{\varepsilon=0} = -(r_-)'_u(0,0) = 0$. Теперь, используя теорему о неявной функции, получаем существование C^r-функции $\beta_1:(-\delta,\delta)\to(-\delta,\delta)$, $\beta_1(0)=\beta_1'(0)=0$ такой, что $\operatorname{sgn}\overline{d}(0,\varepsilon_1,\varepsilon)=$ $=\operatorname{sgn}(\varepsilon_2-\beta_1(\varepsilon_1))$ для $\varepsilon\in(-\delta,\delta)^2$. Поскольку при $\varepsilon_1>0$ $\overline{d}(\varepsilon_1,0,\varepsilon)=d(\varepsilon_1,0,\varepsilon)$, то имеем и (16). Тогда при $\varepsilon_1>0$ $\operatorname{sgn}\beta_1(\varepsilon_1)=-\operatorname{sgn}d(\varepsilon_1,0,(\varepsilon_1,0))=$ $=\operatorname{sgn}r_-(0,(\varepsilon_1,0))$, и потому $\beta_1(\varepsilon_1)>0$.

Аналогично получаем существование функции β_2,β_5,β_6.

Лемма 6. Числа $\overline{u}$ и δ можно считать выбранными так, что существуют C^r-функции $m:(-\delta,\delta)^2\to(-\overline{u},\overline{u})$ и $\beta_7:(-\delta,\delta)\to(-\delta,\delta)$ такие, что $m(0)=0$, $\beta_7(0)=0$, $\beta_7'(0)=0$, $\forall\varepsilon_1\in(-\delta,0)$ $\beta_7(\varepsilon_1)<\beta_6(\varepsilon_1)$, $\forall\varepsilon\in(-\delta,0)^2$ $m(\varepsilon)\in(-\varepsilon_1,\overline{u})$

$$\forall\varepsilon\in(-\delta,0)^2\ \ \forall u\in[-\varepsilon_1,\overline{u}]\ \ \operatorname{sgn}(d_+)_u'(u,\varepsilon)=\operatorname{sgn}(m(\varepsilon)-u),\tag{20}$$

$$\forall\varepsilon\in(-\delta,0)^2\ \ \operatorname{sgn}d_+(m(\varepsilon),\varepsilon)=\operatorname{sgn}(\varepsilon_2-\beta_7(\varepsilon_1)).\tag{21}$$

Доказательство. Пусть $\overline{d}_+(u,\varepsilon):=\overline{d}(u,u,\varepsilon)$. Так как $(\overline{d}_+)_u'(0,0)=(d_+)_u'(0,0)=0$, $(\overline{d}_+)_{uu}''(0,0)=(d_+)_{uu}''(0,0)\neq0$, то числа $\overline{u}$ и δ можно считать выбранными так, что

$$\forall\varepsilon\in(-\delta,\delta)^2\ \ \forall u\in[-\overline{u},\overline{u}]\ \ \operatorname{sgn}(\overline{d}_+)_u'(u,\varepsilon)=\operatorname{sgn}(m(\varepsilon)-u),\tag{22}$$

где $m:(-\delta,\delta)^2\to(-\overline{u},\overline{u})$ – C^r-функция, $m(0)=0$. Пусть $M(\varepsilon):=\overline{d}_+(m(\varepsilon),\varepsilon)$. Так как $M(0)=0$, а ввиду равенства

$$M_{\varepsilon_k}'(0)=[(\overline{d}_+)_u'(u,\varepsilon)m_{\varepsilon_k}'(\varepsilon)+(\overline{d}_+)_{\varepsilon_k}'(u,\varepsilon)]\Big|_{\substack{\varepsilon=0,\\ u=m(0)=0}}=(d_+)_{\varepsilon_k}'(0,0),\ k=1,2,$$

(11) и (4) $M_{\varepsilon_2}'(0)=1$, $M_{\varepsilon_1}'(0)=0$, то δ можно считать столь малым, что

$$\forall\varepsilon\in(-\delta,\delta)^2\ \ \operatorname{sgn}M(\varepsilon)=\operatorname{sgn}(\varepsilon_2-\beta_7(\varepsilon_1)),\tag{23}$$

где $\beta_7:(-\delta,\delta)\to(-\delta,\delta)$ – C^r-функция, $\beta_7(0)=0$, $\beta_7'(0)=0$. Из (11) и (4) получаем $\forall\varepsilon\in(-\delta,0)^2$ $(d_+)_u'(-\varepsilon_1,\varepsilon)>0$. Поэтому $\forall\varepsilon\in(-\delta,0)^2$ $m(\varepsilon)\in(-\varepsilon_1,\overline{u})$, $M(\varepsilon)=d_+(m(\varepsilon),\varepsilon)$ и (20) и (21) следует из (22) и (23). Ввиду (19) при $\varepsilon_1\in(-\delta,0)$, $\varepsilon_2=\beta_6(\varepsilon_1)$ $d_+(-\varepsilon_1,\varepsilon)=0$. Теперь из (20) получаем $M(\varepsilon_1,\beta_6(\varepsilon_1))>0$. Отсюда и из (21) имеем $\forall\varepsilon_1\in(-\delta,0)$ $\beta_7(\varepsilon_1)<\beta_6(\varepsilon_1)$.

4. Особые точки на линии разрыва

Обозначим $[O_\varepsilon^-O_\varepsilon^+]$ отрезок оси x между точками O_ε^- и O_ε^- при $\varepsilon_1\neq0$. Если точка $(x,0)\in[O_\varepsilon^-O_\varepsilon^+]$, то в выпуклой оболочке векторов $X_\varepsilon^-(x,0)$ и $X_\varepsilon^+(x,0)$ существует единственный вектор $X_\varepsilon^0(x,0)=(P^0(x,\varepsilon),0)$, касательный к $[O_\varepsilon^- O_\varepsilon^+]$. Из (2) и (1) согласно [1, с.] следует, что $P^0(x,\varepsilon)$ обращается нуль только при $x=0$, в случае $\varepsilon_1>0$ ($\varepsilon_1<0$) $(P^0)'_x(0,\varepsilon)>0$ ($(P^0)'_x(0,\varepsilon)<0$), т.е. O – грубая седловая особая точка поля X_ε класса 1б, а дуги $[O_\varepsilon^- O)=[-\varepsilon_1,0)\times\{0\}$ и $(OO_\varepsilon^+]=(0,\varepsilon_1]\times\{0\}$ принадлежат выходящим (входящим) сепаратрисам точки O.

5. Окрестность контура Γ

Так как $\chi_0^+(\overline{u})<\overline{u}$, а $\chi_0^-(\underline{u})>\underline{u}$, то аналогично [5] можно построить окрестность U контура Γ, не содержащую особых точек векторных полей $X_0^\pm$, с границей ∂U, состоящей из простых замкнутых кусочно-гладких кривых γ_{int}^+, $\gamma_{\text{int}}^-=S(\gamma_{\text{int}}^+)$ и γ_{ext}, пересекающихся соответственно с дугой $[-\overline{u},\overline{u}]\times\{0\}$ и дугой $\eta[-\underline{u},\underline{u}])$ в единственной точке, и выбрать число δ так, что в точках ∂U траектории поля X_ε, $\varepsilon\in(-\delta,\delta)^2$, входят внутрь U с дугой $\eta[-\underline{u},\underline{u}]$ в единственной точке $\eta(\chi_0^-(\underline{u}))$, а векторные поля $X_\varepsilon^\pm$ не имеют в $U\cap\mathbf{R}_\pm^2$ особых точек. Тогда любая положительная полутраектория поля X_ε, $\varepsilon\in(-\delta,\delta)^2$, начинающаяся в U, пересекает одну из дуг $[-\overline{u},\overline{u}]\times\{0\}$ или $\eta[-\underline{u},\underline{u}]$, а любая отрицательная полутраектория либо пересекает одну из этих дуг, либо выходит из U.

6. Бифуркационная диаграмма и перестройки фазовых портретов

Определим множества E_i и B_i так, как указано в формулировке теоремы.

Пусть $\varepsilon\in\mathrm{E}_1\cup\mathrm{B}_1\cup\mathrm{E}_2$. Так как

$$d(\varepsilon_1,-\varepsilon_1,\varepsilon)\Big|_{\varepsilon_2=0}=[f_\varepsilon^+(\varepsilon_1)-f_\varepsilon^-(-\varepsilon_1)]\Big|_{\varepsilon_2=0}=0,$$

то с учетом (12) и (17) получаем, что $f_\varepsilon^-(-\varepsilon_1)<f_\varepsilon^+(\varepsilon_1)<f_\varepsilon^-(\varepsilon_1)$, и потому $-\varepsilon_1<\chi_\varepsilon^+(\varepsilon_1)<\varepsilon_1$. Таким образом, положительная полутраектория поля X_ε, выходящая из точки O_ε^+, содержит простую дугу $\overset{\frown}{O_\varepsilon^+ N_\varepsilon}$ с концами в точках O_ε^+ и $N_\varepsilon=(\chi_\varepsilon^+(\varepsilon_1),0)$. Согласно (17) $d_+(\varepsilon_1,\varepsilon)<0$. Из (3) и (4) получаем $(d_+)'_u(\varepsilon_1,\varepsilon)<0$. Поскольку, кроме того, имеем (5), то при всех $u\in[\varepsilon_1,\overline{u}]$ $d_+(u,\varepsilon)<0$, и потому $\chi_\varepsilon^+(u)<u$. Отсюда следует, при некотором $m\in\mathbf{N}$ $-\varepsilon_1<(\chi_\varepsilon^+)^m(u)<\varepsilon_1$, т.е. все положительные полутраектории, начинающиеся в точках дуги $[\varepsilon_1,\overline{u}]\times\{0\}$, а в силу симметрии и дуги $[-\overline{u},-\varepsilon_1]\times\{0\}$, пересекаются с дугой $(-\varepsilon_1,\varepsilon_1)\times\{0\}$. При $\varepsilon\in\mathrm{E}_1$ вследствие (16) $f_\varepsilon^+(\varepsilon_1)<f_\varepsilon^-(0)$, и потому $-\varepsilon_1<\chi_\varepsilon^+(\varepsilon_1)<0$. Пусть дуга $\overset{\frown}{O_\varepsilon^+ O_\varepsilon^-}$ – объединение дуг $\overset{\frown}{O_\varepsilon^+ N_\varepsilon}$ и $[-\varepsilon_1,\chi_\varepsilon^+(\varepsilon_1)]\times\{0\}$. Тогда $\Gamma_\varepsilon=\overset{\frown}{O_\varepsilon^+ O_\varepsilon^-}\cup S(\overset{\frown}{O_\varepsilon^+ O_\varepsilon^-})$ – периодическая траектория поля X_ε, являющаяся простой замкнутой кривой. Если $\varepsilon \in \mathrm{B}_1$, то $N_\varepsilon = O$, а дуга $\overset{\frown}{O_\varepsilon^+ N_\varepsilon}$ ($S(\overset{\frown}{O_\varepsilon^+ N_\varepsilon})$) – положительная полутраектория поля X_ε, начинающаяся в точке O_ε^+ (O_ε^-). При $\varepsilon \in \mathrm{E}_2$ получаем $f_\varepsilon^+(\varepsilon_1) > f_\varepsilon^-(0)$, и потому $0 < \chi_\varepsilon^+(\varepsilon_1) < \varepsilon_1$. В этом случае кривая Γ_ε^+ – объединение дуг $\overset{\frown}{O_\varepsilon^+ N_\varepsilon}$ и $[\chi_\varepsilon^+(\varepsilon_1), \varepsilon_1] \times \{0\}$ является периодической траекторией поля X_ε. Но тогда $\Gamma_\varepsilon^- = S(\Gamma_\varepsilon^+)$ также периодическая траектория X_ε.

Так как все положительные полутраектории, начинающиеся в точках дуг $[\varepsilon_1, \overline{u}] \times \{0\}$ и $[-\overline{u}, \varepsilon_1] \times \{0\}$, пересекаются с дугой $(-\varepsilon_1, \varepsilon_1) \times \{0\}$, то при $\varepsilon \in \mathrm{E}_1$ ($\varepsilon \in \mathrm{E}_2$) все они, за исключением одной, входящей в точку O, начиная с некоторого момента времени совпадают с Γ_ε (с Γ_ε^+ или с Γ_ε^-), а при $\varepsilon \in \mathrm{B}_1$ все они начиная с некоторого момента времени совпадают с точкой O.

При всех $\varepsilon \in (0, \delta)^2$ $\chi_\varepsilon^-(u_*(\varepsilon)) = u_+(\varepsilon) > u_-(\varepsilon) > u_*(\varepsilon)$. Учитывая (14), получаем для любого $u \in [-\underline{u}, u_*(\varepsilon)]$ $\chi_\varepsilon^-(u) > u$ и при некотором $m \in \mathbf{N}$ либо (i) $u_*(\varepsilon) < (\chi_\varepsilon^-)^m(u) \le u_-(\varepsilon)$ либо (ii) $u_-(\varepsilon) < (\chi_\varepsilon^-)^m(u) \le u_+(\varepsilon)$. В случае (i) определено $(f_\varepsilon^-)^{-1} \circ (\chi_\varepsilon^-)^m(u)$, а в случае (ii) определено $(f_\varepsilon^-)^{-1} \circ g_\varepsilon \circ (\chi_\varepsilon^-)^m(u)$. Траектория, начинающаяся в точке $\eta(u)$, пересекает в случае (i) дугу $[-\varepsilon_1, \chi_\varepsilon^+(\varepsilon_1)] \times \{0\}$, а в случае (ii) дугу $[-\chi_\varepsilon^+(\varepsilon_1), \varepsilon_1] \times \{0\}$, и потому начиная с некоторого момента времени совпадает с Γ_ε при $\varepsilon \in \mathrm{E}_1$, с Γ_ε^+ или с Γ_ε^- при $\varepsilon \in \mathrm{E}_2$ и с точкой O при $\varepsilon \in \mathrm{B}_1$.

Пусть $\varepsilon \in \mathrm{B}_2$. Тогда $\chi_\varepsilon^+(\varepsilon_1) = \varepsilon_1$ и при всех $u \in (\varepsilon_1, \overline{u}]$ $\chi_\varepsilon^+(u) < u$. Поэтому через точку O_ε^+ (O_ε^-) проходит периодическая траектория Γ_ε^+ (Γ_ε^-) поля X_ε, а траектории, проходящие через точки $(u, 0)$ при $u \in (\varepsilon_1, \overline{u}]$ ($u \in (-\overline{u}, -\varepsilon_1]$), ω-предельны к Γ_ε^+ (Γ_ε^-). Остальные траектории поля X_ε ведут себя так же, как в случае $\varepsilon \in \mathrm{E}_1$.

При $\varepsilon \in \mathrm{E}_3$ из (12), а при $\varepsilon \in \mathrm{B}_3$ из (11) и (4) следует, что $d_+(\varepsilon_1, \varepsilon) > 0$. В обоих случаях $d_+(\cdot, \varepsilon)$ имеет единственный нуль $\hat{u}(\varepsilon) \in (\varepsilon_1, \overline{u})$, при этом $(d_+)'_u(\hat{u}(\varepsilon), \varepsilon) < 0$. Тогда через точку $(\hat{u}(\varepsilon), 0)$ ($(-\hat{u}(\varepsilon), 0)$) проходит устойчивая гиперболическая периодическая траектория Γ_ε^+ (Γ_ε^-), а все траектории, пересекающиеся с дугой $(0, \overline{u}] \times \{0\}$ ($[-\overline{u}, 0) \times \{0\}$), ω-предельны к Γ_ε^+ (Γ_ε^-). Как и в случае $\varepsilon \in \mathrm{E}_1$, получаем, что все остальные траектории пересекаются либо с дугой $(0, \chi_\varepsilon^+(0)) \times \{0\}$ или с дугой $(-\chi_\varepsilon^+(0), 0) \times \{0\}$ или проходят через точку O. В первых двух случаях они ω-предельны соответственно к Γ_ε^+ или Γ_ε^-. Через точку O проходят две траектории, одна ω-предельна к Γ_ε^+, а другая к Γ_ε^-.

Пусть $\varepsilon \in E_4$. Тогда для всех $u \in [\varepsilon_1, -\varepsilon_1]$ $d_+(u,\varepsilon) < 0$. Как и в случае $\varepsilon \in B_3$ получаем, что $d_+(\cdot,\varepsilon)$ имеет единственный нуль $\hat{u}(\varepsilon) \in (-\varepsilon_1, \overline{u})$, при этом $(d_+)'_u(\hat{u}(\varepsilon),\varepsilon) < 0$. Через точку $(\hat{u}(\varepsilon),0)$ ($(-\hat{u}(\varepsilon),0)$) проходит устойчивая гиперболическая периодическая траектория Γ_ε^+ (Γ_ε^-), а траектории, проходящие через точки $(u,0)$ при $u \in (-\varepsilon_1, \overline{u}]$ ($u \in (-\overline{u}, \varepsilon_1]$), ω-предельны к Γ_ε^+ (Γ_ε^-). Отрицательные полутраектории, начинающиеся в точках неустойчивой линейной особенности $(\varepsilon_1, -\varepsilon_1) \times \{0\}$ α-предельны к точке O, а положительные полутраектории, начинающиеся в точках $(\varepsilon_1, -\varepsilon_1) \times \{0\}$, как полутраектории поля X_ε^+ (X_ε^-), ω-предельны к Γ_ε^+ (Γ_ε^-). Аналогично случаю $\varepsilon \in E_2$ получаем, что траектории, пересекающие дугу $\eta([-\underline{u}, u_*(\varepsilon)]$, ω-предельны к Γ_ε^+ или Γ_ε^-.

Пусть $\varepsilon \in B_4$. Аналогично случаю $\varepsilon \in E_4$, имеем гиперболическую периодическую траекторию Γ_ε^+ (Γ_ε^-), к которой ω-предельны траектории, проходящие через точки $(u,0)$ при $u \in (-\varepsilon_1, \overline{u}]$ ($u \in (-\overline{u}, \varepsilon_1]$), и траектории, начинающиеся в точках дуги $[\varepsilon_1, -\varepsilon_1] \times \{0\}$ как траектории поля X_ε^+ (X_ε^-). Ввиду (11) и (4) через точки O_ε^+ и O_ε^- проходит периодическая траектория Γ_ε, $u_*(\varepsilon) = u_+(\varepsilon) = u_-(\varepsilon)$, $\chi_\varepsilon^-(u_*(\varepsilon)) = u_*(\varepsilon)$. Из (14) получаем, что $(\chi_\varepsilon^-)^m(u) \uparrow u_*(\varepsilon)$ при $u \in [-\underline{u}, u_*(\varepsilon))$, т.е. все траектории, пересекающие дугу $\eta[-\underline{u}, u_*(\varepsilon))$, ω-предельны к Γ_ε.

При всех $\varepsilon \in (-\delta,\delta) \times (-\delta,0)$ функция последования χ_ε^- определена на $u \in [-\underline{u}, u_-(\varepsilon)]$ и $\chi_\varepsilon^-(u_-(\varepsilon)) < u_-(\varepsilon)$. Теперь из (14) следует, что χ_ε^- имеет на $[-\underline{u}, u_-(\varepsilon)]$ единственную (устойчивую) неподвижную точку $u_0(\varepsilon) \in (-\underline{u}, u_-(\varepsilon))$. Через точку $\eta(u_0(\varepsilon))$ проходит устойчивая гиперболическая периодическая траектория Γ_ε, к которой ω-предельны все траектории, пересекающие дугу $\eta[-\underline{u}, u_-(\varepsilon)]$.

При $\varepsilon \in E_5 \cup B_5 \cup E_6$ из (11), (4) и (19) следует, что $\varepsilon_1 < (\chi_\varepsilon^+)^{-1}(-\varepsilon_1) < -\varepsilon_1$. Поэтому отрицательная полутраектория поля X_ε, выходящая из точки O_ε^-, содержит простую дугу $\overset{\frown}{O_\varepsilon^- M_\varepsilon}$ с концами в точках O_ε^- и $M_\varepsilon = ((\chi_\varepsilon^+)^{-1}(\varepsilon_1), 0)$. Как и при $\varepsilon \in E_4$, получаем, что существует устойчивая гиперболическая периодическая траектория Γ_ε^+ (Γ_ε^-), проходящая через точку дуги $(-\varepsilon_1, \overline{u}) \times \{0\}$ ($(-\overline{u}, \varepsilon_1) \times \{0\}$), к которой ω-предельны траектории, начинающиеся в точках дуги $((\chi_\varepsilon^+)^{-1}(-\varepsilon_1), \overline{u}] \times \{0\}$ ($(-\overline{u}, -(\chi_\varepsilon^+)^{-1}(-\varepsilon_1)] \times \{0\}$) как траектории поля X_ε^+ (X_ε^-). Траектории, начинающиеся в точках дуги $[\varepsilon_1, (\chi_\varepsilon^+)^{-1}(-\varepsilon_1)) \times \{0\}$ ($[-(\chi_\varepsilon^+)^{-1}(-\varepsilon_1), -\varepsilon_1) \times \{0\}$) как траектории поля X_ε^+ (X_ε^-), пересекают дугу $\eta(u_-(\varepsilon),\overline{u})$ ($S\eta(u_-(\varepsilon),\overline{u})$) и потому ω-предельны к Γ_ε.

Пусть $\varepsilon\in \mathrm{E}_5$. Из (18) следует $f_\varepsilon^-(-\varepsilon_1)<f_\varepsilon^+(0)$, и потому $\varepsilon_1<(\chi_\varepsilon^+)^{-1}(-\varepsilon_1)<0$. Пусть дуга $\overset{\frown}{O_\varepsilon^- O_\varepsilon^+}$ – объединение дуг $\overset{\frown}{O_\varepsilon^- M_\varepsilon}$ и $[\varepsilon_1,(\chi_\varepsilon^+)^{-1}(-\varepsilon_1)]\times\{0\}$. Тогда $\Gamma_\varepsilon^u=\overset{\frown}{O_\varepsilon^- O_\varepsilon^+}\cup S(\overset{\frown}{O_\varepsilon^- O_\varepsilon^+})$ – периодическая траектория поля X_ε.

При $\varepsilon\in \mathrm{B}_5$ из (18) имеем $(\chi_\varepsilon^+)^{-1}(-\varepsilon_1)=0$ и $M_\varepsilon=O$. Поэтому $\overset{\frown}{O_\varepsilon^- M_\varepsilon}\cup(0,-\varepsilon_1]\times\{0\}$ ($\overset{\frown}{O_\varepsilon^- O}\cup(\varepsilon_1,0)\times\{0\}$) является траекторией поля X_ε, ω-предельной к O.

Пусть $\varepsilon\in \mathrm{E}_6$. Ввиду (18) $0<(\chi_\varepsilon^+)^{-1}(-\varepsilon_1)<-\varepsilon_1$. Простая замкнутая кривая $\Gamma_\varepsilon^{+,u}$ – объединение дуг $\overset{\frown}{O_\varepsilon^- M_\varepsilon}$ и $[(\chi_\varepsilon^+)^{-1}(-\varepsilon_1),-\varepsilon_1]\times\{0\}$ – является периодической траекторией поля X_ε. Но тогда $\Gamma_\varepsilon^{-,u}=S(\Gamma_\varepsilon^{+,u})$ также периодическая траектория поля X_ε.

При $\varepsilon\in \mathrm{B}_6$ из (19) и (21) $d_+(-\varepsilon_1,\varepsilon)=0$, $d_+(m(\varepsilon),\varepsilon)\big|_{\varepsilon_2=\beta_6(\varepsilon_1)}>0$. Отсюда, из (20) и (13) получаем, что $d(\cdot,\varepsilon)$ имеет на $(-\varepsilon_1,\overline{u})$ единственный нуль $\hat{u}(\varepsilon)$, при этом $d_u'(\hat{u}(\varepsilon),\varepsilon)<0$. Через точки O_ε^- и $(\hat{u}(\varepsilon),0)$ проходят периодические траектории, соответственно $\Gamma_\varepsilon^{+,u}$ и Γ_ε^+, поля X_ε, причем Γ_ε^+ – устойчивая гиперболическая траектория, а траектории, проходящие через точки $(u,0)$, $u\in(-\varepsilon_1,\overline{u})$, $u\neq\hat{u}(\varepsilon)$, ω-предельны к Γ_ε^+. В силу симметрии через точки O_ε^- и $(-\hat{u}(\varepsilon),0)$ проходят периодические траектории, соответственно $\Gamma_\varepsilon^{-,u}$ и Γ_ε^-, поля X_ε, причем Γ_ε^- – устойчивая гиперболическая траектория, а траектории, проходящие через точки $(u,0)$, $u\in(-\overline{u},\varepsilon_1)$, $u\neq-\hat{u}(\varepsilon)$, ω-предельны к Γ_ε^-.

Пусть $\varepsilon\in \mathrm{E}_7$. Из (13), (19)–(21) получаем, что $d_+\cdot,\varepsilon)$ имеет на $(-\varepsilon_1,\overline{u})$ два нуля $\hat{u}_i(\varepsilon)$, $i=1,2$, $-\varepsilon_1<\hat{u}_1(\varepsilon)<\hat{u}_2(\varepsilon)<\overline{u}$, $d_u'(\hat{u}_1(\varepsilon),\varepsilon)>0$, $d_u'(\hat{u}(\varepsilon),\varepsilon)<0$. Таким образом, через точку $(\hat{u}_1(\varepsilon),0)$ ($(\hat{u}_2(\varepsilon),0)$) проходит неустойчивая (устойчивая) гиперболическая периодическая траектория $\Gamma_\varepsilon^{+,u}$ (Γ_ε^+), траектории, проходящие через точки $(u,0)$ при $u\in(\hat{u}_1(\varepsilon),\hat{u}_2(\varepsilon))$, ω-предельны к Γ_ε^+ и α-предельны к $\Gamma_\varepsilon^{+,u}$ при $u\in(-\varepsilon_1,\hat{u}_1(\varepsilon))$, ω-предельны к Γ_ε и α-предельны к $\Gamma_\varepsilon^{+,u}$, при $u\in(\hat{u}_1(\varepsilon),\overline{u}]$ ω-предельны к Γ_ε^+ и выходят из U при убывании времени. В силу симметрии через точку $(-\hat{u}_1(\varepsilon),0)$ ($(-\hat{u}_2(\varepsilon),0)$) проходит неустойчивая (устойчивая) гиперболическая периодическая траектория $\Gamma_\varepsilon^{-,u}$ (Γ_ε^-), траектории, проходящие через точки $(u,0)$ при $u\in(-\hat{u}_2(\varepsilon),-\hat{u}_1(\varepsilon))$, ω-предельны к Γ_ε^- и α-предельны к $\Gamma_\varepsilon^{-,u}$ при

$u \in (-\hat{u}_1(\varepsilon), \varepsilon_1)$, ω-предельны к Γ_ε и α-предельны к $\Gamma_\varepsilon^{-,u}$, при $u \in (-\bar{u}, -\hat{u}_2(\varepsilon))$ ω-предельны к Γ_ε^- и выходят из U при убывании времени.

Пусть $\varepsilon \in \mathrm{B}_7$. Тогда $d_+(\cdot, \varepsilon)$ имеет на $(-\varepsilon_1, \bar{u})$ единственный нуль $\hat{u}(\varepsilon)$, а его кратность равна 2. Через точку $(\hat{u}(\varepsilon), 0)$ ($(-\hat{u}(\varepsilon), 0)$) проходит двойной цикл Γ_ε^+ (Γ_ε^-); траектории, проходящие через точки $(u, 0)$ при $u \in (\hat{u}(\varepsilon), \bar{u})$ (при $u \in (-\bar{u}, -\hat{u}(\varepsilon))$), ω-предельны к Γ_ε^+ (Γ_ε^-), выходят из U при убывании времени, при $u \in (-\varepsilon_1, \hat{u}(\varepsilon))$ (при $u \in (-\hat{u}(\varepsilon), \varepsilon_1)$) α-предельны к Γ_ε^+ (Γ_ε^-) и ω-предельны к Γ_ε.

При $\varepsilon \in \mathrm{E}_8$ ввиду (21) $\forall u \in [-\varepsilon_1, \bar{u}]$ $d_+(u, \varepsilon) < 0$. При $\varepsilon \in \mathrm{B}_8$, $\varepsilon \in \mathrm{E}_9$ и $\varepsilon \in \mathrm{B}_9$ имеем $d_+(\varepsilon_1, \varepsilon) = \varepsilon_2 - r_2(\varepsilon_1, \varepsilon) < 0$ $(d_+)'_u(\varepsilon_1, \varepsilon) = -(r_2)'_u(\varepsilon_1, \varepsilon) \le 0$. Отсюда, из (5) получаем $\forall u \in [\varepsilon_1, \bar{u}]$ $d_+(u, \varepsilon) < 0$. Поэтому при $\varepsilon \in \mathrm{E}_8$, $\varepsilon \in \mathrm{B}_8$ и $\varepsilon \in \mathrm{E}_9$ траектории, проходящие через точки $(u, 0)$, $|\varepsilon_1| \le |u| \le \bar{u}$, ω-предельны к Γ_ε. При $\varepsilon \in \mathrm{B}_9$ через точки O_ε^+ и O_ε^- проходит периодическая траектория Γ_ε. Все остальные траектории, за исключением точки O, ω-предельны к Γ_ε.

Грубость векторных полей X_ε, $\varepsilon \in \mathrm{E}_i$ ($i = 1, 2, ..., 9$) в U следует из полученного описания траекторий в U и достаточных условий грубости [1].

Библиографический список

1. **Филиппов, А. Ф.** Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью / А. Ф. Филиппов. – Москва : Наука, 1985. – 224 с.
2. **Simpson, D. J. W.** Bifurcations in piecewise-smooth continuous dynamical systems / D. J. W. Simpson. – Word Scientific, 2010. – 238 p.
3. **Guardia, M.** Generic bifurcations of low codimension of planar Filippov systems / M. Guardia, T. M. Seara, M. A Teixeira // J. of Differential Equations. – 2011. – Vol. 250, № 4 – P. 1967–2023.
4. **Ройтенберг, В. Ш.** О бифуркациях петли сепаратрисы седла кусочно-гладкой динамической системы / В. Ш. Ройтенберг // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2020. – № 1. – С. 36–50.
5. **Ройтенберг, В. Ш.** Локальные бифуркации кусочно-гладких обратимых динамических систем на плоскости / В. Ш. Ройтенберг // Математика и математическое моделирование. – 2020. – № 1. – С. 1–15.
6. **Хартман, Ф.** Обыкновенные дифференциальные уравнения / Ф. Хартман. – Москва : Мир, 1970. – 720 с.
7. **Фихтенгольц, Г. М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления / Г. М. Фихтенгольц. – Москва : Физматгиз. – 1962. – Т. 1. – 607 с.

References

1. Filippov A. F. *Differentsial'nye uravneniya s razryvnoy pravoy chast'yu* [Differential equations with discontinuous right-hand side]. Moscow: Nauka, 1985, 224 p. [In Russian]
2. Simpson D. J. W. *Bifurcations in piecewise-smooth continuous dynamical systems*. Word Scientific, 2010, 238 p.
3. Guardia M., Seara T. M., Teixeira M. A. *J. of Differential Equations*. 2011, vol. 250, no. 4, pp. 1967–2023.

4. Roytenberg V. Sh. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2020, no. 1, pp. 36–50. [In Russian]
5. Roytenberg V. Sh. *Matematika i matematicheskoe modelirovanie* [Mathematics and mathematical modelling]. 2020, no. 1, pp. 1–15. [In Russian]
6. Khartman F. *Obyknovennye differentsial'nye uravneniya* [Ordinary differential equations]. Moscow: Mir, 1970, 720 p. [In Russian]
7. Fikhtengol'ts G. M. *Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya* [Differential and integral calculus course]. Moscow: Fizmatgiz, 1962, vol. 1, 607 p. [In Russian]

Ройтенберг Владимир Шлеймович
кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра высшей математики, Ярославский государственный технический университет (Россия, г. Ярославль, Московский проспект, 88)

Roytenberg Vladimir Shleymovich
Candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, sub-department of higher mathematics, Yaroslavl State Technical University (88 Moskovsky avenue, Yaroslavl, Russia)

E-mail: vroitenberg@mail.ru

Образец цитирования:

Ройтенберг, В. Ш. О бифуркациях периодической траектории «восьмерка» кусочно-гладкого векторного поля с симметрией / В. Ш. Ройтенберг // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2020. – № 3 (55). – С. 98–113. – DOI 10.21685/2072-3040-2020-3-8.